CONCOURS TA A EPREUVES COMMUNES

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE
ISIMA - ECOLE NAVALE - ENSAM - ENS CACHAN -
ENSAIS B - ESIM - ISEP - ITECH

Epreuve de

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Durée : 3 heures

L'usage des calculatrices programmables et alphanumériques est autorisé sous réserve des dispositions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME :

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

La matrice diagonale d'ordre n, dont les éléments diagonaux sont les nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, est notée Diag $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique pour laquelle la base canonique notée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ est orthonormée.

On considère dans $\mathbb{R}^n$ le système différentiel (1) suivant :

$$Y''+AY'+KY=G \qquad (1)$$

où

- K est une matrice symétrique réelle ayant toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ strictement positives.
- A est une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles et dont les espaces propres sont confondus avec ceux de K.
- G est une fonction, continue de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}^n$.

Une solution Y de (1) est une fonction de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}^n$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}+$, qui vérifie, pour tout réel positif t : $Y''(t)+AY'(t)+KY(t)=G(t)$.

Deux éléments Y_0 et Z_0 étant donnés dans $\mathbb{R}^n$, on s'intéresse à la recherche des solutions Y de (1) qui vérifient de plus les conditions initiales (C),

$$Y(0)=Y_0 \text{ et } Y'(0)=Z_0 \qquad (C).$$

Une telle fonction Y est dite solution du problème $\mathcal{P}$.

Dans la **partie I**, on ramène l'étude de telles solutions à l'étude de n équations différentielles scalaires linéaires du second ordre, auxquelles sont adjointes des conditions initiales au point $t = 0$.

Dans la **partie II**, on étudie ces équations différentielles scalaires dans le cas où G est la fonction nulle.

Dans la **partie III**, on propose une méthode de résolution numérique approchée de telles équations scalaires.

Partie I

1. Rappeler brièvement pourquoi K est diagonalisable dans une base orthonormée $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n})$ de $\mathbb{R}^n$. On notera $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ les valeurs propres de K et P la matrice de passage de la base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n})$ à la base $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n})$.

À toute fonction Y de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}^n$, on associe la fonction X de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout réel positif t, $Y(t) = PX(t)$. Les fonctions composantes de X sont notées x_p $(1 \leq p \leq n)$.

2. On se place dans le cas $A = 0$.

a) Soit Y une fonction de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}^n$ deux fois dérivable.

Montrer que Y est solution du problème $\mathcal{P}$ si et seulement si chacun des fonctions scalaires x_p $(1 \leq p \leq n)$ est solution du problème différentiel suivant $\mathcal{P}p$:

$$\begin{cases} \forall \quad t \in \mathbb{R}+ \quad x_p''(t) + (\omega_p)^2 x_p(t) = f_p(t) \\ x_p \text{ et } x'_p \text{ vérifient une condition initiale} (C_p). \end{cases} \qquad (2)$$

On précisera les nombres réels ω_p strictement positifs à l'aide des nombres $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, les fonctions f_p à l'aide de P et de G et les conditions initiales (C_p) à l'aide de Y_0, Z_0 et de P.

b) En déduire qu'il y a existence et unicité de la solution Y du problème $\mathcal{P}$.

3. On revient au cas précisé dans le préambule où A et K ont les mêmes sous-espaces propres. Soit Y une fonction de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}^n$, deux fois dérivable.

Montrer que Y est solution du problème $\mathcal{P}$ si et seulement si la fonction x_p est solution du problème différentiel $\mathcal{P}'p$ suivant :

$$\begin{cases} \forall \quad t \in \mathbb{R}+ \quad x_p''(t) + a_p x_p'(t) + (\omega_p)^2 x_p(t) = f_p(t) \\ x_p \text{ et } x'_p \text{ vérifient une condition initiale } (C_p). \end{cases} \qquad (3)$$

On précisera la matrice Diag $(a_1, a_2, ..., a_n)$, à l'aide de A et de P.

Partie II

On s'intéresse dans cette partie à la solution de l'équation différentielle scalaire (E) vérifiant les conditions initiales (C_0) avec :

(E) $\quad \forall t \in \mathbb{R}+, \quad x''(t) + 2c\omega x'(t) + \omega^2 x(t) = 0.$

(C_0) $\quad x(0) = x_0$ et $x'(0) = v_0$.

Où $\quad c \in \mathbb{R}+, \quad \omega \in \mathbb{R}+^*, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad v_0 \in \mathbb{R}, \quad (x_0, v_0) \neq (0,0)$

et où x désigne une fonction inconnue deux fois dérivable sur $\mathbb{R}+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Dans chacun des cas suivants :

   a) $c = 0$.

   b) $c \neq 0$ et $c \neq 1$.

   c) $c = 1$,
   déterminer l'expression de $x(t)$ en fonction de t, x_0, v_0, et des racines r_1 et r_2 (éventuellement complexes) de l'équation $r^2 + 2c\omega r + \omega^2 = 0$ et préciser le comportement de $x(t)$ pour t tendant vers $+\infty$.

2. ω étant fixé, déterminer et représenter dans le plan complexe le lieu de r_1 et r_2 lorsque c décrit $\mathbb{R}+$.

Partie III

Dans cette partie, on cherche à déterminer des valeurs approchées de la solution x de (E) vérifiant les conditions (C_0).

On définit les suites réelles (x_n), (v_n), (γ_n) pour $n \in \mathbb{N}$ par :

- $x_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}$, $(x_0, v_0) \neq (0, 0)$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\, v_n \\ v_{n+1} = v_n + h\, \gamma_n \\ \gamma_n = f_n - 2c\omega v_n - \omega^2 x_n. \end{cases}$

Où : $h \in \mathbb{R}+^*$, $c \in \mathbb{R}+^*$, $f \in C^0(\mathbb{R}+, \mathbb{R})$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n = f(nh)$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ hv_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la suite (U_n) vérifie une relation du type : $U_{n+1} = HU_n + h^2 F_n$,
   où l'on explicitera :
   - F_n, vecteur de $\mathbb{R}^2$, en fonction de f_n,
   - H, matrice réelle carrée d'ordre 2, en fonction de c et de $\theta = h\omega$.

2. Déterminer, lorsque $c \neq 1$, les valeurs propres s_1 et s_2 (éventuellement complexes) de H en fonction de h et des nombres r_1 et r_2 définis dans la partie II. Que deviennent ces relations lorsque $c = 1$?

On suppose dans tout ce qui suit que $f = 0$.

3. Étude des cas $c \neq 1$.

   a) Montrer que, lorsque $c \neq 1$, la matrice H est diagonalisable. Déterminer une matrice inversible Q telle que $Q^{-1}HQ$ soit une matrice diagonale D.

   b) Calculer D^n et en déduire H^n.

   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{(s_2 - 1)x_0 - hv_0}{s_2 - s_1} s_1^n + \dfrac{(s_1 - 1)x_0 - hv_0}{s_1 - s_2} s_2^n$.

4. **Étude du cas $c = 1$.**

a) La matrice H est-elle diagonalisable ?

b) Montrer que, si l'on considère $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\theta & 1 \end{pmatrix}$, la matrice $T = Q^{-1}HQ$ est triangulaire.

c) Calculer T^n et en déduire H^n.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \left[\frac{1}{s}\left((1-s)x_0 + hv_0\right)n + x_0\right] s^n$.

5. Approximation de la solution x.

On pose $h = \frac{T}{n}$ où T est fixé > 0. On se propose de montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$ (ou lorsque h tend vers 0), x_n tend vers une limite qui n'est autre que $x(T)$ où x est la solution du problème indiqué dans la partie II. On suppose toujours $f = 0$.

a) On suppose $c > 1$.
Déterminer, en utilisant les relations entre s_1, s_2, r_1 et r_2, les limites, lorsque n tend vers $+\infty$, de s_1^n et s_2^n.
En déduire la limite de $x_n - x(T)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

b) On suppose $c = 1$.
Déterminer de même la limite de $x_n - x(T)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Fin de l'énoncé